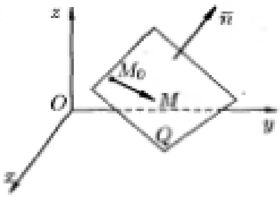
12.2. Уравнения плоскости в пространстве



Простейшей поверхностью является плоскость. Плоскость в пространстве $Oxyz$ можно задать разными способами. Каждому из них соответствует определенный вид ее уравнения.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть в пространстве $Oxyz$ плоскость Q задана точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектором $\bar{n} = (A; B; C)$, перпендикулярным этой плоскости (см. рис. 69). Выведем уравнение плоскости Q. Возьмем на ней произвольную точку $M(x; y; z)$ и составим вектор

$$\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0).$$

При любом расположении точки M на плоскости Q векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю: $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, т. е.

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.} \qquad (12.3)$$

Координаты любой точки плоскости Q удовлетворяют уравнению (12.3), координаты точек, не лежащих на плоскости Q, этому уравнению не удовлетворяют (для них $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} \neq 0$).

Уравнение (12.3) называется ***уравнением плоскости, проходящей через данную точку*** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ***перпендикулярно вектору*** $\bar{n} = (A; B; C)$. Оно первой степени относительно текущих координат x, y и z. Вектор $\bar{n} = (A; B; C)$ называется ***нормальным вектором плоскости.***

Придавая коэффициентам A, B и C уравнения (12.3) различные значения, можно получить уравнение любой плоскости, проходящей через точку M_0. Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется *связкой плоскостей*, а уравнение (12.3) — *уравнением связки плоскостей.*

Общее уравнение плоскости

Рассмотрим общее уравнение первой степени с тремя переменными x, y и z:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (12.4)$$

Итак, уравнение (12.4) определяет в системе координат $Oxyz$ некоторую плоскость. Уравнение (12.4) называется ***общим уравнением плоскости.***

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. *Если* $D = 0$, то оно принимает вид $Ax + By + Cz = 0$. Этому уравнению удовлетворяет точка $O(0; 0; 0)$. Следовательно, в этом случае *плоскость проходит через начало координат.*

2. *Если* $C = 0$, то имеем уравнение $Ax + By + D = 0$. Нормальный вектор $\bar{n} = (A; B; 0)$ перпендикулярен оси Oz. Следовательно, *плоскость параллельна оси* Oz; если $B = 0$ — параллельна оси Oy, $A = 0$ — параллельна оси Ox.

3. *Если* $C = D = 0$, то плоскость проходит через $O(0; 0; 0)$ параллельно оси Oz, т. е. плоскость $Ax + By = 0$ *проходит через ось* Oz. Аналогично, уравнениям $By + Cz = 0$ и $Ax + Cz = 0$ отвечают плоскости, проходящие соответственно через оси Ox и Oy.

4. *Если* $A = B = 0$, то уравнение (12.4) принимает вид $Cz + D = 0$, т. е. $z = -\frac{D}{C}$. Плоскость *параллельна плоскости* Oxy. Аналогично, уравнениям $Ax + D = 0$ и $By + D = 0$ отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям Oyz и Oxz.

5. *Если* $A = B = D = 0$, то уравнение (12.4) примет вид $Cz = 0$, т. е. $z = 0$. Это *уравнение плоскости* Oxy. Аналогично: $y = 0$ — уравнение плоскости Oxz; $x = 0$ — уравнение плоскости Oyz.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем уравнение плоскости Q, проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой.

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x; y; z)$ и составим векторы $\overline{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$. Эти векторы лежат на плоскости Q, следовательно, они компланарны. Используем условие компланарности трех векторов (их смешанное произведение равно нулю), получаем

$\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{12.6}$$

Уравнение (12.6) есть *уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.*

Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки a, b и c, т. е. проходит через три точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ и $C(0;0;c)$ (см. рис. 70).

Подставляя координаты этих точек в уравнение (12.6), получаем

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, имеем $bcx - abc + abz + acy = 0$, т. е. $bcx + acy + abz = abc$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{12.7}$$

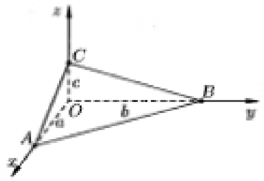


Рис. 70

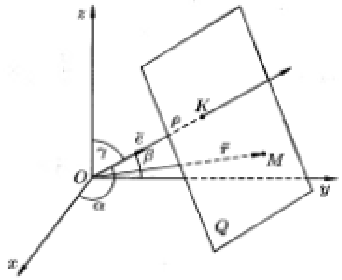


Рис. 71

Уравнение (12.7) называется ***уравнением плоскости в отрезках на осях.*** Им удобно пользоваться при построении плоскости.

Нормальное уравнение плоскости

Положение плоскости Q вполне определяется заданием единичного вектора $\bar{e}$, имеющего направление перпендикуляра OK, опущенного на плоскость из начала координат, и длиной p этого перпендикуляра (см. рис. 71).

Пусть $OK = p$, а α, β, γ — углы, образованные единичным вектором $\bar{e}$ с осями Ox, Oy и Oz. Тогда $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$. Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;y;z)$ и соединим ее с началом координат. Образуем вектор $\bar{r} = \overline{OM} = (x;y;z)$.

При любом положении точки M на плоскости Q проекция радиус-вектора $\bar{r}$ на направление вектора $\bar{e}$ всегда равно p: $\text{пр}_{\bar{e}}\,\bar{r} = p$, т. е. $\bar{r} \cdot \bar{e} = p$ или

$$\boxed{\bar{r} \cdot \bar{e} - p = 0.} \tag{12.8}$$

Уравнение (12.8) называется *нормальным уравнением плоскости в векторной форме.* Зная координаты векторов $\bar{r}$ и $\bar{e}$, уравнение (12.8) перепишем в виде

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.} \tag{12.9}$$

Уравнение (12.9) называется ***нормальным уравнением плоскости в координатной форме.***

Отметим, что общее уравнение плоскости (12.4) можно привести к нормальному уравнению (12.9) так, как это делалось для уравнения прямой на плоскости. А именно: умножить обе части уравнения (12.4) на нормирующий множитель $\lambda = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где знак берется противоположным знаку свободного члена D общего уравнения плоскости.

12.3. Плоскость. Основные задачи

Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости Q_1 и Q_2:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Под ***углом между плоскостями*** Q_1 и Q_2 понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Угол φ между нормальными векторами $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ плоскостей Q_1 и Q_2 равен одному из этих углов (см. рис. 72). Поэтому $\cos\varphi = \dfrac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}$ или

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Для нахождения острого угла следует взять модуль правой части.

Если плоскости Q_1 и Q_2 перпендикулярны (см. рис. 73, *а*), то таковы же их нормали, т. е. $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$ (и наоборот). Но тогда $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$,

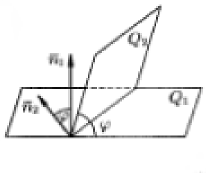


Рис. 72

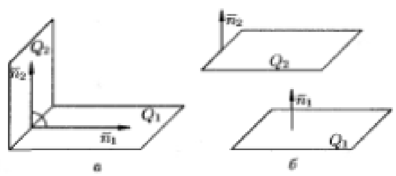


Рис. 73

т. е. $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Полученное равенство есть *условие перпендикулярности двух плоскостей* Q_1 и Q_2.

Если плоскости Q_1 и Q_2 параллельны (см. рис. 73, *б*), то будут параллельны и их нормали $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ (и наоборот). Но тогда, как известно, координаты векторов пропорциональны: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$. Это и есть *условие параллельности двух плоскостей* Q_1 и Q_2.

Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость Q своим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q находится по формуле

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}.$$

Вывод этой формулы такой же, как вывод формулы расстояния от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ (см. с. 73).

Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1; y_1; z_1)$ — произвольная точка плоскости Q, на направление нормального вектора $\bar{n} = (A; B; C)$ (см. рис. 74). Следовательно,

$$d = |\,\text{пр}_{\bar{n}}\,\overline{M_1M_0}| = \left|\frac{\overline{M_1M_0}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|}\right| = \frac{|(x_0-x_1)A + (y_0-y_1)B + (z_0-z_1)C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$
$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

А так как точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ принадлежит плоскости Q, то

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \quad \text{т. е.} \quad D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1.$$

Поэтому $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Отметим, что если плоскость Q задана уравнением $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, то расстояние от

точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости Q может быть найдено по формуле

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|.$$

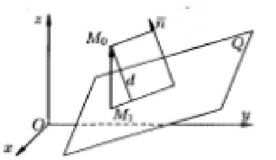


Рис. 74

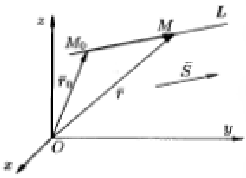


Рис. 75

12.4. Уравнения прямой в пространстве

Векторное уравнение прямой

Положение прямой в пространстве вполне определено, если задать какую-либо точку M_0 на прямой и вектор $\bar{S}$, параллельный этой прямой. Вектор $\bar{S}$ называется ***направляющим вектором прямой***. Пусть прямая L задана ее точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\bar{S} = (m; n; p)$. Возьмем на прямой L произвольную точку $M(x; y; z)$. Обозначим радиус-векторы точек M_0 и M соответственно через $\bar{r}_0$ и $\bar{r}$. Очевидно, что три вектора $\bar{r}_0$, $\bar{r}$ и $\overline{M_0M}$ связаны соотношением

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{M_0M}. \tag{12.10}$$

Вектор $\overline{M_0M}$, лежащий на прямой L, параллелен направляющему вектору $\bar{S}$, поэтому $\overline{M_0M} = t\bar{S}$, где t — скалярный множитель, называемый *параметром*, может принимать различные значения в зависимости от положения точки M на прямой (см. рис. 75).

Уравнение (12.10) можно записать в виде

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{S}.} \tag{12.11}$$

Полученное уравнение называется ***векторным уравнением прямой***.

Параметрические уравнения прямой

Замечая, что $\bar{r} = (x; y; z)$, $\bar{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$, $t\bar{S} = (tm; tn; tp)$, уравнение (12.11) можно записать в виде

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x_0 + tm)\bar{i} + (y_0 + tn)\bar{j} + (z_0 + tp)\bar{k}.$$

Отсюда следуют равенства:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}} \tag{12.12}$$

Они называются ***параметрическими уравнениями прямой*** в пространстве.

Канонические уравнения прямой

Пусть $\bar{S} = (m; n; p)$ — направляющий вектор прямой L и $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка, лежащая на этой прямой. Вектор $\overline{M_0M}$, соединяющий точку M_0 с произвольной точкой $M(x; y; z)$ прямой L, параллелен вектору $\bar{S}$. Поэтому координаты вектора $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ и вектора $\bar{S} = (m; n; p)$ пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.} \tag{12.13}$$

Уравнения (12.13) называются ***каноническими уравнениями прямой*** в пространстве.

Замечания: 1) Уравнения (12.13) можно было бы получить сразу из параметрических уравнений прямой (12.12), исключив параметр t. Из уравнений (12.12) находим

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t.$$

2) Обращение в нуль одного из знаменателей уравнений (12.13) означает обращение в нуль соответствующего числителя.

Например, уравнения $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{0}$ задают прямую, проходящую через точку $M_0(2; -4; 1)$ перпендикулярно оси Oz (проекция вектора $\bar{S}$ на ось Oz равна нулю). Но это означает, что прямая лежит в плоскости $z = 1$, и поэтому для всех точек прямой будет $z - 1 = 0$.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

Пусть прямая L проходит через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. В качестве направляющего вектора $\bar{S}$ можно взять вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, т. е. $\bar{S} = \overline{M_1M_2}$ (см. рис. 76). Следовательно, $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$. Поскольку прямая проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, то, согласно уравнениям (12.13), уравнения прямой L имеют вид

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.} \tag{12.14}$$

Уравнения (12.14) называются ***уравнениями прямой, проходящей через две данные точки***.

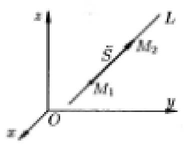


Рис. 76

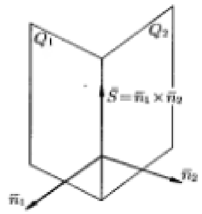


Рис. 77

Общие уравнения прямой

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{12.15}$$

Каждое из уравнений этой системы определяет плоскость. Если плоскости не параллельны (координаты векторов $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ не пропорциональны), то система (12.15) определяет прямую L как геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют каждому из уравнений системы (см. рис. 77). Уравнения (12.15) называют *общими уравнениями прямой*.

От общих уравнений (12.15) можно перейти к каноническим уравнениям (12.13). Координаты точки M_0 на прямой L получаем из системы уравнений (12.15), придав одной из координат произвольное значение (например, $z = 0$).

Так как прямая L перпендикулярна векторам $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$, то за направляющий вектор $\bar{S}$ прямой L можно принять векторное произведение $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$:

$$\bar{S} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Замечание: Канонические уравнения прямой легко получить, взяв две какие-либо точки на ней и применив уравнения (12.14).

Пример 12.1. Написать канонические уравнения прямой L, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 2x-y-3z+5=0. \end{cases}$$

❍ Решение: Положим $z=0$ и решим систему $\begin{cases} x+y=-1, \\ 2x-y=-5. \end{cases}$ Находим точку $M_1(-2;1;0)\in L$. Положим $y=0$ и решим систему $\begin{cases} x-z=-1, \\ 2x-3z=-5. \end{cases}$ Находим вторую точку $M_2(2;0;3)$ прямой L. Записываем уравнение прямой L, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3}.$$ ●

12.5. Прямая линия в пространстве. Основные задачи

Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

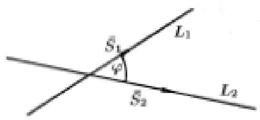


Рис. 78

Под углом между этими прямыми понимают угол между направляющими векторами $S_1=(m_1;n_1;p_1)$ и $S_2=(m_2;n_2;p_2)$ (см. рис. 78). Поэтому, по известной формуле для косинуса угла между векторами, получаем $\cos\varphi=\dfrac{\bar S_1\cdot\bar S_2}{|\bar S_1|\cdot|\bar S_2|}$ или

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.} \qquad (12.16)$$

Для нахождения острого угла между прямыми L_1 и L_2 числитель правой части формулы (12.16) следует взять по модулю.

Если *прямые L_1 и L_2 перпендикулярны*, то в этом и только в этом случае имеем $\cos\varphi=0$. Следовательно, числитель дроби (12.16) равен нулю, т. е. $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Если *прямые L_1 и L_2 параллельны*, то параллельны их направляющие векторы $\bar S_1$ и $\bar S_2$. Следовательно, координаты этих векторов пропорциональны, т. е. $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

Пример 12.2. Найти угол между прямыми

$$\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x+y-z-1=0, \\ 2x-y+3x+5=0. \end{cases}$$

❍ Решение: Очевидно, $\bar S_1=(2;-1;3)$, а $\bar S_2=\bar n_1\times\bar n_2$, где $\bar n_1=(2;1;-1)$, $\bar n_2=(2;-1;3)$. Отсюда следует, что $\bar S_2=(2;-8;-4)$. Так как $\bar S_1\cdot\bar S_2=4+8-12=0$, то $\varphi=90^\circ$. ●

Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x-x_1}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

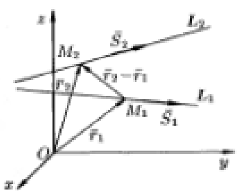


Рис. 79

Их направляющие векторы соответственно $\bar S_1=(m_1;n_1;p_1)$ и $\bar S_2=(m_2;n_2;p_2)$ (см. рис. 79).

Прямая L_1 проходит через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, радиус-вектор которой обозначим через $\bar r_1$; прямая L_2 проходит через точку $M_2(x_2;y_2;z_2)$, радиус-вектор которой обозначим через $\bar r_2$. Тогда

$$\bar r_2-\bar r_1=\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1).$$

Прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, если векторы $\bar S_1$, $\bar S_2$ и $\overline{M_1M_2}=\bar r_2-\bar r_1$ компланарны. Условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения: $(\bar r_2-\bar r_1)\bar S_1\bar S_2=0$, т. е.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.}$$

При выполнении этого условия прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, то есть либо пересекаются, если $\bar S_2\neq\lambda\bar S_1$, либо параллельны, если $\bar S_1\parallel\bar S_2$.

12.6. Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи

Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость Q задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая L уравнениями $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

Углом между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость. Обозначим через φ угол между плоскостью Q и прямой L, а через θ — угол между векторами $\bar{n} = (A; B; C)$ и $\bar{S} = (m; n; p)$ (см. рис. 80). Тогда $\cos\theta = \frac{\bar{n} \cdot \bar{S}}{|\bar{n}| \cdot |\bar{S}|}$. Найдем синус угла φ, считая $\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$: $\sin\varphi = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$. И так как $\sin\varphi \geqslant 0$, получаем

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{12.17}$$

Если *прямая L параллельна плоскости Q*, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ перпендикулярны (см. рис. 81), а потому $\bar{S} \cdot \bar{n} = 0$, т. е.

$$Am + Bn + Cp = 0$$

является ***условием параллельности*** прямой и плоскости.

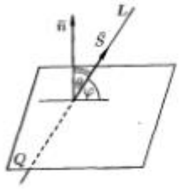


Рис. 80

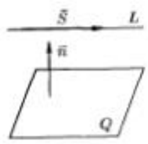


Рис. 81

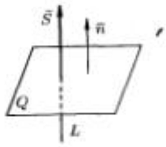


Рис. 82

Если *прямая L перпендикулярна плоскости Q*, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ параллельны (см. рис. 82). Поэтому равенства

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

являются ***условиями перпендикулярности*** прямой и плоскости.

Пересечение прямой с плоскостью. Условие принадлежности прямой плоскости

Пусть требуется найти точку пересечения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \tag{12.18}$$

с плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{12.19}$$

Для этого надо решить систему уравнений (12.18) и (12.19). Проще всего это сделать, записав уравнения прямой (12.18) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости (12.19), получаем уравнение $A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0$ или

$$t(Am + Bn + Cp) + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \tag{12.20}$$

Если прямая L не параллельна плоскости, т. е. если $Am + Bn + Cp \neq 0$, то из равенства (12.20) находим значение t:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Подставляя найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения прямой с плоскостью.

Рассмотрим теперь случай, когда $Am + Bn + Cp = 0$ ($L \parallel Q$):

а) если $F = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая L параллельна плоскости и пересекать ее не будет (уравнение (12.20) решения не имеет, так как имеет вид $0 \cdot t + F = 0$, где $F \neq 0$);

б) если $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то уравнение (12.20) имеет вид $t \cdot 0 + 0 = 0$; ему удовлетворяет любое значение t, любая точка прямой является точкой пересечения прямой и плоскости. Заключаем: прямая лежит в плоскости. Таким образом, одновременное выполнение равенств

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

является ***условием принадлежности прямой плоскости.***